# 徐桂芳猜想“不存在（4k+2）阶纯幻方”的证明

胡 俊 华

（江汉石油机械厂，湖北 潜江 433114）

**摘 要**：本文利用偶阶方阵的特殊模式证明了（4k+2）阶纯幻方是不存在的，证实了徐桂芳的一个有趣猜想。据此，文献[1]与本文建立了任意阶纯幻方的理论及方法的架构。

**关键词**：幻方、猜想、证明

# Proof of Xu’ Conjecture that Pure Magic Square of (4k+2) Does Not Exist

Jianghan Petroleum Machinery Plant Junhua Hu

**Abstact**: In this paper, we prove the nonexistence of pure magic square of order n=4k+2. Hence, book[1] together with this paper may be considered as a complete investigation of pure magic squares any order.

**Keywords**: Magic Square, Proof of Conjecture

## 1 问题的提出

**定义** 设一个 n 阶方阵的元遍历 $1\sim n^2$ 的 $n^2$ 个连续自然数，如果它的每一行、每一列以及每一泛对角线的 n 个元素之和都相等，则称这个方阵为 **n 阶纯幻方**[1].

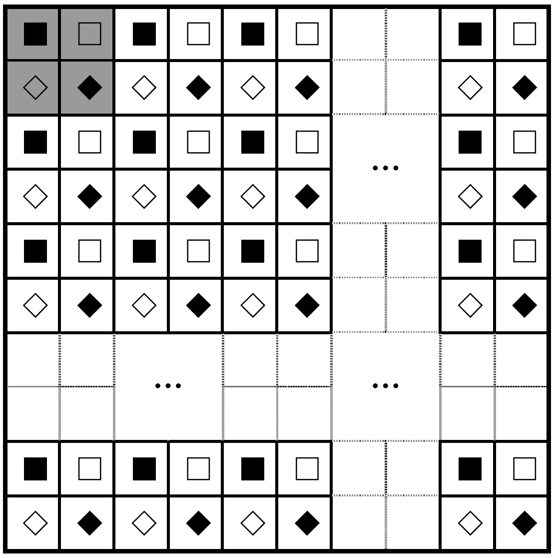
现在，关于纯幻方，阶数为 $n=2^{\lambda}p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$. 其中：$p_i$ 为大于 2 的质数；$\lambda$、$\alpha_i$ 为非负整数；当 $n>3,\lambda\neq 1$ 时，n 阶纯幻方的构造问题徐桂芳教授都已解决[1]. 徐教授猜想“不存在（4k+2）阶纯幻方”.

## 2 简短证明

对于一个偶数 n=2t 阶的方阵，我们可从左上顶点起，以左上角阴影部分所示带标记的 2x2 单元对其平铺，则标记为 ■、□、◆、◇ 的方格数目应相等，各有 $n^2/4$ 个.
并记：

S[■]=所有标记为 ■ 的方格上的数之和； S[□]=所有标记为 □ 的方格上的数之和；
S[◆]=所有标记为 ◆ 的方格上的数之和； S[◇]=所有标记为 ◇ 的方格上的数之和.

由于纯幻方各行、各列、所有的（广义）主副对角线上的 n 个数之和均为定值 S，由图可见存在如下关系：



$$\begin{cases} S[■] + S[□] = \text{所有奇行} = tS \\ S[◆] + S[◇] = \text{所有偶行} = tS \\ S[■] + S[◇] = \text{所有奇列} = tS \\ S[□] + S[◆] = \text{所有偶列} = tS \\ S[■] + S[◆] = \text{所有黑对角线}^{*} = tS \\ S[□] + S[◇] = \text{所有白对角线}^{*} = tS \end{cases}$$

其中左上顶点坐标定义为（1,1）.

注：* 仅取同一方向的对角线.

这是一个关于（S[■]，S[□]，S[◆]，S[◇]）的方程组，

取其中 4 个独立的方程，求得 S[■] ＝ S[□] ＝ S[◆] ＝ S[◇] ＝ tS/2 是其唯一解.

其中，幻和 $S=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n^2} i=\frac{n\left(n^2+1\right)}{2}=t\left(4t^2+1\right)$，

因 S[■]、S[□]、S[◆]、S[◇] 均为整数，故必有 2｜$t^2(4t^2+1)$，可得 2｜t，所以不可能t=2k+1（k为自然数），即不可能存在（4k+2）型纯幻方．故猜想命题为真． 证毕

**附 注** 幻方以其数学之美受到广大业余数学家的爱好和专业数学家的关注。近日在网上看到几个数学猜想，就有一则是关于幻方的，即引言中提到的徐桂芳猜想．笔者也曾是一个业余数学爱好者，学生时代也解过幻方，10 多年前就证明了这个定理，但我一直相信这只不过重复了先辈的工作（因为证明并不难），所以从未公开发表过．近日上网，方知在外界这仍是一个猜想，而且直到 2000 年才由郑格于证明了第一个特例[2]．我十分惊疑，便在网站[3]的留言板上写下了证明（要点），结果得到版主——苏州的郭先强先生的回复，肯定了证明的正确性，还肯定这是该猜想的第一个证明．受其鼓励和要求，将证明摘要整理成本文发表.

## 参考文献：


[1] 徐桂芳.曹敏谦. 纯幻方的构造原理和方法[M]. 西安:西安交通大学出版社. 1993.12

[2] 郑格于.徐桂芳. 五阶及六阶全对称幻方[J]. **上海交通大学学报**，2000,34(8),1134-1138

ZHENG Ge-yu, XU Gui-fang. Perfect magic square of 5 and 6 orders[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2000,34(8),1134-1138

[3] 数学猜想[EB/OL]. http://maths.myrice.com/guess.htm


---


本文已发表于：**上海交通大学学报**，2003,37 Sup.(11),160

**文章编号**：1006-2467(2003)S1-0160-01



作者简介：胡俊华（1967-），湖北仙桃人，高级工程师，业余数学爱好者，感兴趣领域为组合数论. E-mail: whojh@163.com，hujunhua@sina.com